



گزینه ۱

۱

انتخاب ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول: $\binom{5}{3}$
 انتخاب ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم: $\binom{6}{4}$
 ۳! جایگشت‌های کتاب‌های سال اول
 ۴! جایگشت‌های کتاب‌های سال دوم

$$\Rightarrow \binom{5}{3} \binom{6}{4} 3! 4!$$

گزینه ۱

۲

$$C(n, 2) = 10 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})! \times 2} = 10$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow n = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{P(n, r)}{C(n-1, r-1)} &= \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)! \times (r-1)!}} = \frac{n! \times (\cancel{n-r})! \times (r-1)!}{(\cancel{n-r})! (n-1)!} \\ &= \frac{n(\cancel{n-1})! (r-1)!}{(\cancel{n-1})!} = n(r-1)! = 5(r-1)! \end{aligned}$$

گزینه ۱

۳

در کلمه "بوستان" حروف نقطه‌دار عبارت‌اند از: "ب"، "ت" و "ن" لذا اولین خانه سمت راست به ۳ حالت می‌تواند پر شود. برای بقیه خانه‌ها شرط خاصی نداریم.

ب، ت، ن		
۴	۵	۳
ب و س ت ا		

$$\Rightarrow 4 \times 5 \times 3 = 60$$

چون سه نوع غذا برای سه شخص متمایز انتخاب می‌شود، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است.

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

راه حل اول: برای اینکه یک مثلث بسازیم باید ۲ نقطه از نقاط خط پایین را انتخاب کنیم و ۱ نقطه از نقاط خط بالا و یا بالعکس؛ یعنی:

$$\binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \binom{3}{1} = 3 \times 4 + 6 \times 3 = 12 + 18 = 30$$

راه حل دوم: استفاده از اصل متمم: ابتدا ۳ نقطه از ۷ نقطه موجود را به $\binom{7}{3}$ طریق انتخاب می‌کنیم، سپس حالاتی را که ۳ نقطه انتخاب شده نمی‌توانند تشکیل مثلث دهند را از آن کم می‌کنیم. اگر ۳ نقطه انتخاب شده بر روی یک خط راست باشند تشکیل مثلث نمی‌دهند. این حالت فقط به $\binom{3}{3}$ طریق از خط پایین و به $\binom{4}{3}$ طریق از خط بالا خواهد بود؛ بنابراین تعداد حالاتی که ۳ نقطه تشکیل مثلث نمی‌دهند، برابر است با:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 1 + 4 = 5$$

پس بنا بر اصل متمم تعداد کل مثلث‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{3} - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} \right) = \frac{7!}{4! \times 3!} - 5 = 35 - 5 = 30$$

مجموعه حروف کلمه موردنظر یکی از حالات زیر می‌تواند باشد:

- ۱) e, e, d, d ۲) e, e, d, c ۳) e, d, d, d
۴) e, d, d, c ۵) d, d, d, c

در هر یک از حالات فوق تعداد کلمات ساخته شده به ترتیب برابر با ۶, ۱۲, ۴, ۱۲, ۴ است که در مجموع می‌شود ۳۸.

دو تا O یکسان دارد که ابتدا و انتهای کلمه است:

O _ _ _ _ O

تعداد حالت $4! = 24$ طریق است.

حالت اول :

فقط ۰	۱, ۳, ۵	۱, ۳, ۵, ۶	۱, ۳, ۵, ۶
۱	۲	۳	۴

$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

حالت دوم :

فقط ۵	۰, ۱, ۳, ۶	۰, ۱, ۳, ۶	۱, ۳, ۶
۱	۲	۳	۳

$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$$

طبق اصل جمع، تعداد کل عددها برابر است با: $24 + 18 = 42$

حالت اول :

فقط y	n.e	o.n.e	o.n.e	فقط m
۱	۱	۲	۳	۱

$$\Rightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم: (جابه‌جایی مهم نیست)

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{8}{1} \times \binom{6}{2} = 8 \times \frac{6!}{4! \times 2!} = 8 \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 120$$

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 20$$

پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی است $\Rightarrow$ تعداد سؤال‌ها (تعداد گزینه‌ها) = تعداد حالت‌ها

پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی نیست $\Rightarrow$ تعداد سؤال‌ها (۱ + تعداد گزینه‌ها) = تعداد حالت‌ها

بنابراین با توجه به رابطهٔ دوم، گزینه "۲" صحیح است.

$$\text{تعداد حالت‌ها} = (3 + 1)^{20} = 4^{20}$$

برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد: رو یا پشت. پس برای دو سکه تعداد حالت‌ها برابر $2^2 = 4$ است. از طرفی در تاس اعداد زوج عبارت‌اند از: ۲، ۴ و ۶ که تعداد آن‌ها ۳ است. لذا طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$3 \times 4 = 12$$

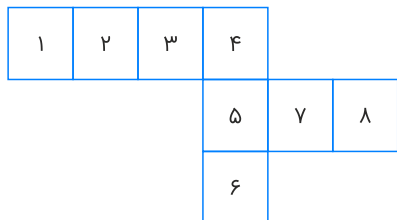
جمع سه عدد وقتی زوج است که هر سه تا زوج باشند، تعداد اعداد زوج از ۱ تا ۱۰، ۵ تا می‌باشد.

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} = 125$$

از اولین خانه سمت چپ شروع به رنگ زدن می‌کنیم. خانه شماره ۱، ۳ حالت دارد. خانه شماره ۲، ۲ حالت دارد، زیرا رنگی را که خانه شماره ۱ دارد نمی‌توان بپذیرد. به همین ترتیب خانه شماره ۳، ۲ حالت دارد، زیرا رنگی را که خانه شماره ۲ دارد نمی‌تواند بپذیرد؛ بنابراین تمامی خانه‌های دیگر نیز ۲ حالت دارند، پس حاصل برابر است با:

$$3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$$

توجه کنید مهم نیست که شما عملیات رنگ زدن را از کجا آغاز کنید.



چون ۵ نفر در ۵ بخش متفاوت فعالیت می‌کنند، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow P(8, 5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6720$$

تبدیل r شیء از n شیء به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow 210 = \frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\Rightarrow 210 = \frac{n(n-1)(n-2)(\cancel{n-3})!}{(\cancel{n-3})!} \Rightarrow n = 7$$

تعداد کل جایگشت‌ها: $\frac{6!}{2!}$

R ها کنار هم باشند: $5!$

$$R = \frac{6!}{2!} - 5! = 240$$

چون کلاً ۵ گل رز وجود دارد، پس حداقل ۴ گل رز یعنی باید ۴ یا ۵ گل رز انتخاب شوند. (حرف "یا" به معنی استفاده از اصل جمع است)

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \binom{5}{4} \binom{6}{3} + \binom{5}{5} \binom{6}{2} = \frac{5!}{4! \times 1!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} + \frac{5!}{5! \times 0!} \times \frac{6!}{4! \times 2!}$$

$$= \frac{5 \times 4!}{4!} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} + 1 \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 5 \times 20 + 15 = 115$$

نقطه A یکی از رؤوس چهار ضلعی ما خواهد بود. کافی است از ۸ نقطه دیگر ۳ نقطه برای ۳ رأس دیگر چهار ضلعی انتخاب کنیم. این کار به $\binom{8}{3}$ طریق امکان‌پذیر است:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = 56$$

هر مسافر مستقل از مسافر دیگر از قطار پیاده می‌شود، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها می‌شود 2^8 یعنی ۲۵۶ که دو حالت قابل قبول نیست یکی حالتی که همه در ایستگاه اول پیاده شوند و دیگری حالتی که همه در ایستگاه دوم پیاده شوند، پس داریم:

$$256 - 2 = 254$$

نکته تستی: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم به طوری که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند؛ تعداد حالت های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می باشد، زیرا k شیء قبلاً انتخاب شده اند، پس باید $r-k$ شیء باقی مانده را از بین $n-k$ شیء انتخاب کرد.

$$\binom{7-3}{5-3} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 6$$

اول: حروف این کلمه را به شکل روبه رو مرتب می کنیم: NNN, AA, ZI
دوم: چندتا حالت داریم:

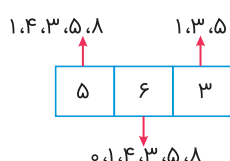
(۱) ۳ تا N از کیسه بیرون بیاید که ۱ حالت دارد.

$$\square\square\square \Rightarrow \binom{2}{1} \binom{3}{1} = 6 \quad (۲) \text{ تا حرف تکراری داشته باشیم}$$

در این حالت برای جایگاه $\square$ از دو حرف A و N یکی را به $\binom{2}{1}$ طریق انتخاب می کنیم، سپس از بین ۳ حرف باقی مانده یکی را به $\binom{3}{1}$ طریق برای جایگاه $\circ$ انتخاب می کنیم.

(۳) حرف تکراری نداشته باشیم: کافی است از ۴ حرف متمایز N, A, Z, I ۳ تا را به $\binom{4}{3}$ طریق انتخاب کنیم.
سوم: طبق اصل جمع تعداد کل حالت ها برابر با $1 + 6 + 4 = 11$ است.

ابتدا یکان، سپس صدگان و دهگان را پر می کنیم.



$$\text{تعداد حالت ها} = 3 \times 6 \times 5 = 90$$

ارقام زوج عبارت‌اند از: ۲, ۴, ۶, ۸. چون می‌خواهیم همیشه کنار هم باشند بنابراین ۱ شیء حساب می‌شود.

۲, ۴, ۶, ۸, ۱, ۵, ۳
یک شیء

اعداد داخل بسته
اعداد خارج آن
تعداد جایگشت‌ها = $4! \times 4!$

اگر از B عبور نکنیم پس فقط ۳ مسیر کلی به صورت زیر وجود دارد:

$E \rightarrow C \rightarrow D \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= 4 \times 1 = 4$

$E \rightarrow A \rightarrow D \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= 2 \times 2 = 4$

$E \rightarrow D \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= 1$

طبق اصل جمع، تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $4 + 4 + 1 = 9$

حروف تکراری را کنار هم قرار می‌دهیم:

s _ e e _ m _ i i _ c c _ r l

حروف تکراری یک حرف محسوب می‌شوند و جابه‌جایی آن‌ها $7!$ خواهد بود.

نماینده گروه باید از بین ۴ دانش‌آموز دوازدهم انتخاب شود که تعداد حالت‌های آن $\binom{4}{1}$ می‌باشد، پس از انتخاب نماینده دو نفر بعدی را از بین ۶ نفر (۳ تا دوازدهم و ۳ تا یازدهم) انتخاب می‌کنیم که تعداد حالت‌های آن $\binom{6}{2}$ است، در نتیجه تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = \frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{6!}{4! \times 2!} = 60$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$(۱) \quad \binom{8}{1} \times \binom{7}{3} \times 2^3 = 2240 \quad \text{نفر انتخابی داریم:}$$

$$(۲) \quad \binom{8}{2} \times \binom{6}{1} \times 2 = 336 \quad \text{نفر انتخابی داریم:}$$

و نهایتاً طبق اصل جمع داریم:

$$2240 + 336 = 2576$$

دو حالت داریم:

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \overset{\uparrow}{\underline{1}} = 24 \quad \text{حالت اول: رقم یکان صفر باشد:}$$

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \overset{\uparrow}{\underline{2}} = 36 \quad \text{حالت دوم: رقم یکان ۴ یا ۶ باشد:}$$

$$36 + 24 = 60 \quad \text{بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:}$$